

Ch. 12: Functions of Several Variables

討論 $z = f(x, y)$, $f(x_1, x_2, \dots, x_d)$ 函數
性質, 其中 $z \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, \dots, x_d, x, y \in \mathbb{R}$
稱 z 為因變數 (dependent variable, 或
response), 稱 $(x, y), (x_1, \dots, x_d)$ 為
自變數 (independent variables).

多變數函數與單變數函數計算方法相同

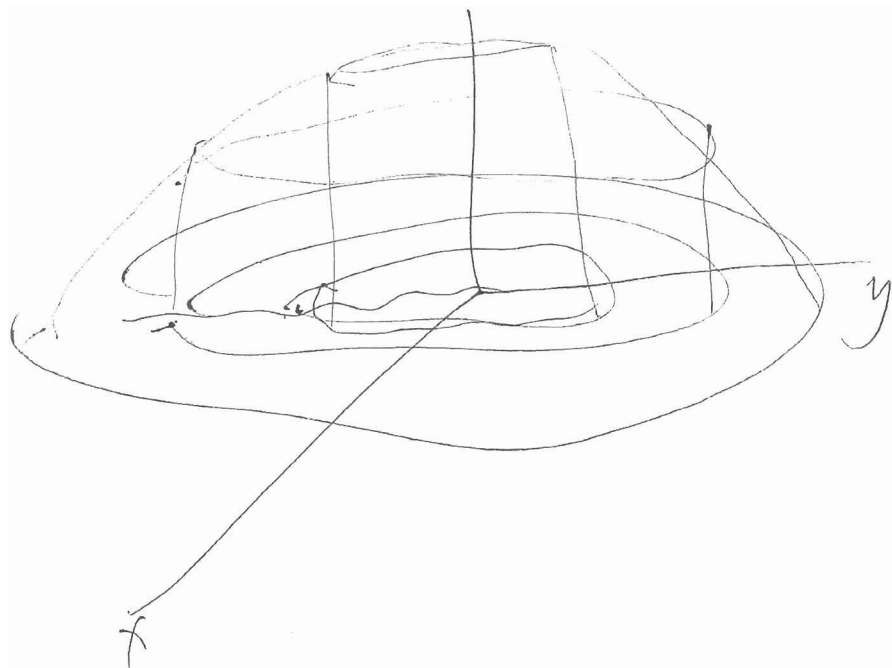
$$\textcircled{1} (f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y),$$

$$\textcircled{2} (fg)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y),$$

$$\textcircled{3} (f/g)(x, y) = f(x, y)/g(x, y),$$

$$\textcircled{4} (g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)).$$

圖形 $f(x,y) = \sqrt{16-4x^2-y^2}$ 為何?



$$4x^2 + y^2 = 16$$

橢圓形

函數 $z = f(x,y)$:

domain 定義域 指 (x,y) 對 f 有定義之集合

range 值域 指 f 的 值範圍
或 值域

level surface: 给定常数 c , 满足

$$f(x_1, \dots, x_d) = c \text{ 的曲面.}$$

例如 $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2$

给 $c=0$, $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 = 0$ (原点)

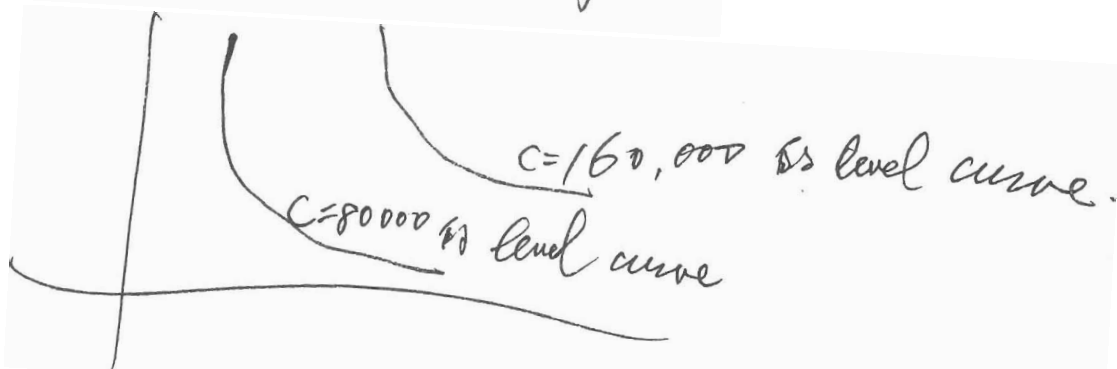
~~$c=4$, $f(x, y, z) \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ (椭圆柱体)~~

level curve (~~curve~~ contour line),

给定常数 c , 满足

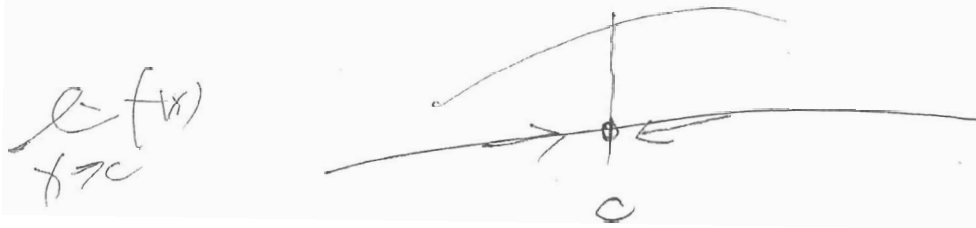
$$f(x_1, \dots, x_d) = c \text{ 的 } (x_1, \dots, x_d) \text{ 点集合.}$$

例如: $z = 100 x^{0.6} y^{0.4}$.



12.2. Limits and Continuity

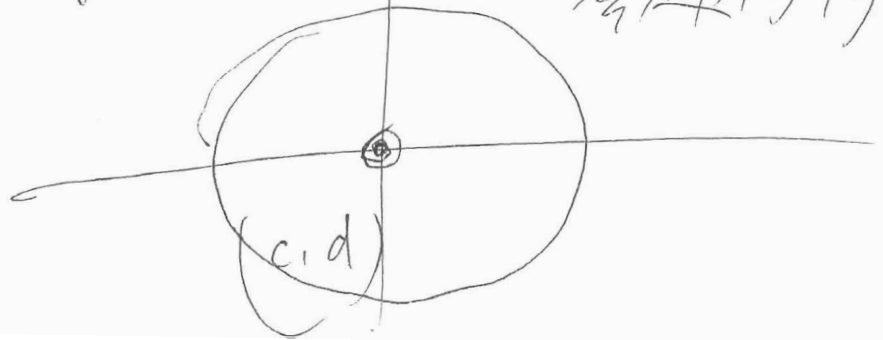
在單變數 $z = f(x)$ 中, limit 極限值 L



在多變數函數 $z = f(x, y)$ 中, limit 為

$$L = \lim_{(x,y) \rightarrow (c,d)} f(x,y)$$

指圓圈逐漸縮小, 函數值會趨向何值?



數學用字

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得

$$0 < \|(x,y) - (c,d)\| < \delta$$

$$|f(x,y) - L| < \epsilon$$

不管 (x,y) 由那個方向往 (c,d) 走, 函數值 $f(x,y)$ 均往 L 靠近.

① 若找到 2 個方向, $f(x,y)$ 走向不同極限值 L , 也 $f(x,y)$ 不存在

例) $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = a$, 其中 $f(x,y) = x$

(13) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 2}{1+4} = 2$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
 $0 < |(x,y) - (1,2)| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} < \delta$
 $\left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} - 2 \right| = \left| \frac{5x^2y - 2x^2 - 2y^2}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x^2(y-2)|}{x^2+y^2} + \left| \frac{2x^2 - y \cdot (y-2)}{x^2+y^2} \right|$
 $\leq |y-2| + 2|y| + |y-2|$

(14) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$
 $0 < |(x,y) - (0,0)| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$
 $\left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| \leq 5 \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} \right) |y| \leq 5 \cdot 1 \cdot |y| < 5\delta < \varepsilon$
 $\text{取 } \delta = \frac{\varepsilon}{5}$

(15) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \text{不存在}$

$\because (x,y) \rightarrow (0,0)$ 则 $x^2 + y^2 \rightarrow 0$
 $\therefore \frac{1}{x^2 + y^2}$ 往 ∞ 跑

(16) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

① 由 x 轴在 0 的正值往 $(0,0)$ 走, limit 值为 1
 ② 由 y 轴在 0 由正值往 $(0,0)$ 走, limit 值为 -1
 $\therefore$ 极限不存在

(34) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$

① 由 x 在 $0^+ \rightarrow (0,0)$ 为 1

② 由 y 在 $0^+ \rightarrow (0,0)$ 为 1

③ 由 $x=y$ 在 $(0^+, 0^+) \rightarrow (0,0)$ 为 0
对角线

$\therefore$ 极限不存在。

連續定義：若 $\lim_{(x,y) \rightarrow (c,d)} f(x,y) = f(c,d)$

稱 f 在 (c,d) 處連續。

若 f 在 (c,d) cont $\Leftrightarrow f$ 在 (c,d) 的極限值 = 函數值

性質：若 f, g 均連續，則

$f \pm g, kf, f/g, f \cdot g, f \circ g$
仍為連續。

例： $f(x,y) = \frac{x-2y}{x^2+y^2}$ ， f 的分子、分母
均為 cont，且分母 $\neq 0$ ， f 為 cont。

例： $g(x,y) = \frac{z}{y-x^2}$ ， g 的分子、分母

均為 cont，但分母有為 0 處

$\therefore g$ 在分母為 0 處不 cont，其它均 cont。

$$(12) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (x+3y^2),$$

$x, 3y^2$ 均 $\times$ cont.
 $x+3y^2$ cont 沒有無意義

$$= 2 + 3 \cdot 1 = 5$$

12.3. Partial Derivatives 偏微分

$z = f(x, y)$. By partial derivative f 对各个 independent variable 做微分

$$f_x(x, y) = f \text{ 对 } x \text{ 的偏微分} = \frac{d f(x, y)}{dx}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

= f 将 x 视为变数, y 视为常数的微分

$$f_y(x, y) = f \text{ 对 } y \text{ 的偏微分} = \frac{d f(x, y)}{dy}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

= f 将 y 视为变数, x 为常数的微分

如 f_x, f_y 称为 f 的第 1 阶偏微分

例 $f(x,y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$

$$\therefore f_x(x,y) = 3 - 2xy^2 + 2 \cdot 3 x^2y$$

$$f_y(x,y) = -x^2(2y) + 2x^3$$

将 $z = f(x,y)$

$$f_x(x,y) = \frac{d}{dx} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} = z_x$$

$$\left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{(x,y)=(a,b)} = f_x(a,b)$$

同理对 f_y

例 $f(x,y) = x \cdot e^{(x^2y)}$ 求在点 $(1, \ln 2)$ 之

f_x 及 f_y 值

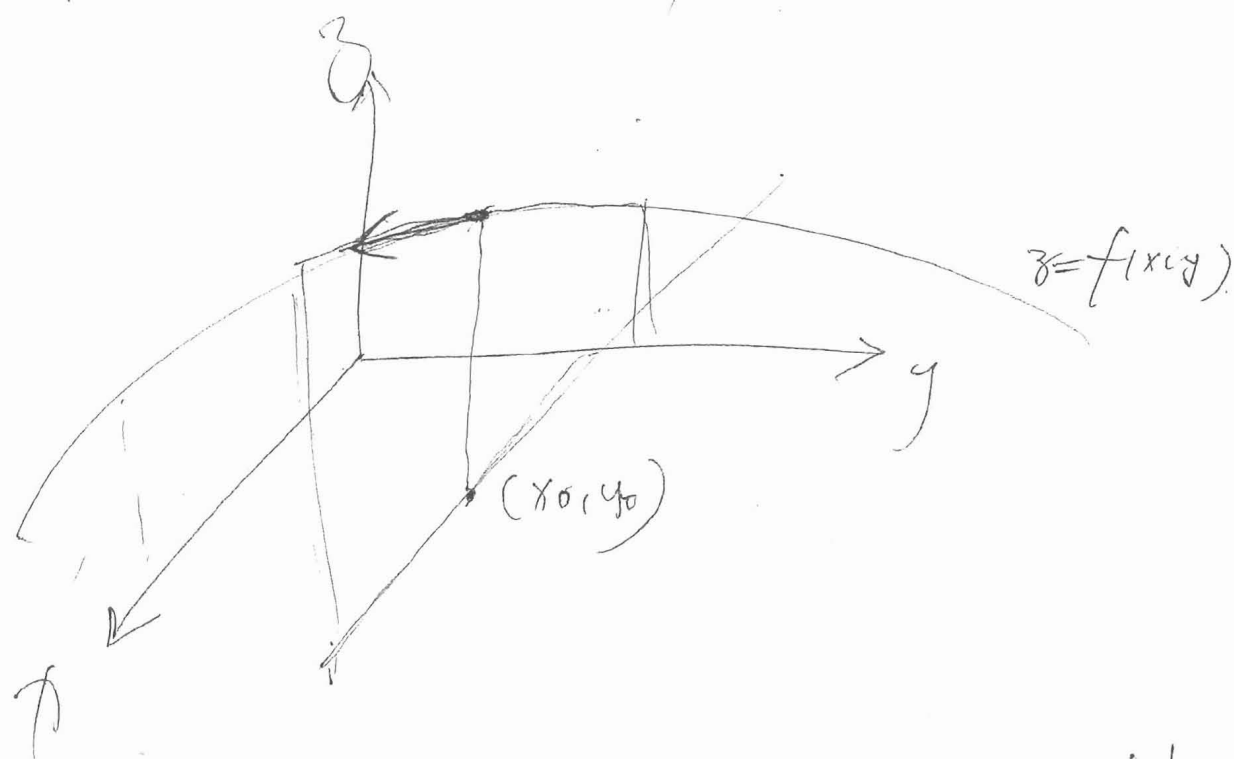
$$f_x = x e^{x^2y} (2xy) + e^{x^2y}$$

$$\therefore f_x(1, \ln 2) = 4 \ln 2 + 2,$$

$$f_y = x e^{x^2y} \cdot (x^2) = x^3 e^{x^2y}$$

$$f_y(1, \ln 2) = 2$$

第1階偏微分的幾何意義



f_x 為 f 在 (x_0, y_0) 處平行 x 軸

上之切線斜率，稱為

the slope of the surface in the x -direction,

f_y 為 f 在 (x_0, y_0) 處平行 y 軸上之

的切線斜率，稱為 the slope of the surface in the y -direction.

斜率即稱為 the rate of change

(134) $f(x,y) = \frac{-x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$, 求 f 在
 x 轴及 y 轴方向上的斜率

$$f_x = -x, \quad f_y = -2y$$

(135) $f(x,y,z) = xy + yz^2 + xz$, 求 f 在 x, y, z 方向
的斜率,

$$f_x = y + z,$$

$$f_y = x + z^2$$

$$f_z = 2yz + x$$

第二階偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[f_x \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \right]$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$$

= f 对 x 微分 2 次

$$= f_{xx}.$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[f_x \right] = f \text{ 先对 } x \text{ 微分 再对 } y \text{ 微分。}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[f_y \right]$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[f_y \right]$$

$$(24) f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y$$

$$f_x = 3y^2 + 10xy^2$$

$$f_{xx} = 10y^2$$

$$f_{xy} = 6y + 20xy$$

$$f_y = 6xy - 2 + 10x^2y$$

$$f_{yx} = 6y + 20xy$$

$$f_{yy} = 6x + 10x^2$$

定理：若 f_{xy} 及 f_{yx} 均在 (x,y) 处 ~~cont functions~~ ^{是 cont}

$$\text{则 } f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)。$$

不是所有 ^{case} 均有 $f_{xy} = f_{yx}$ 。

同樣做多階偏微分

$$f_{x_1 x_1 \dots x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \dots \frac{\partial}{\partial x_1} f$$

$$f_{x_1 z_1 z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial x_1} f$$

$$f_{x_1 y_1 z_1} = \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} f$$

習題 page 847 65-68.

12.4. Differential

指 $y = f(x)$ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

$$dy = f'(x) dx$$

dx 为 x 轴上微小量, dy 为 f
 ~~dx 及 dy 分别为 x 轴与~~

曲线 dx 所对应的 y 值
的变化量称为 differential.

若 $z = f(x, y)$

$\Rightarrow$ 由 (x, y) 变到 $(x + dx, y + dy)$
函数值的变化量为 dz
称为 total differential.

$$dz = f(x+dx, y+dy) - f(x, y)$$

$$= [f(x+dx, y+dy) - f(x, y+dy)]$$

$$+ [f(x, y+dy) - f(x, y)]$$

由 Taylor theorem

$$\doteq f_x(x, y+dy) dx$$

$$+ f_y(x, y) dy$$

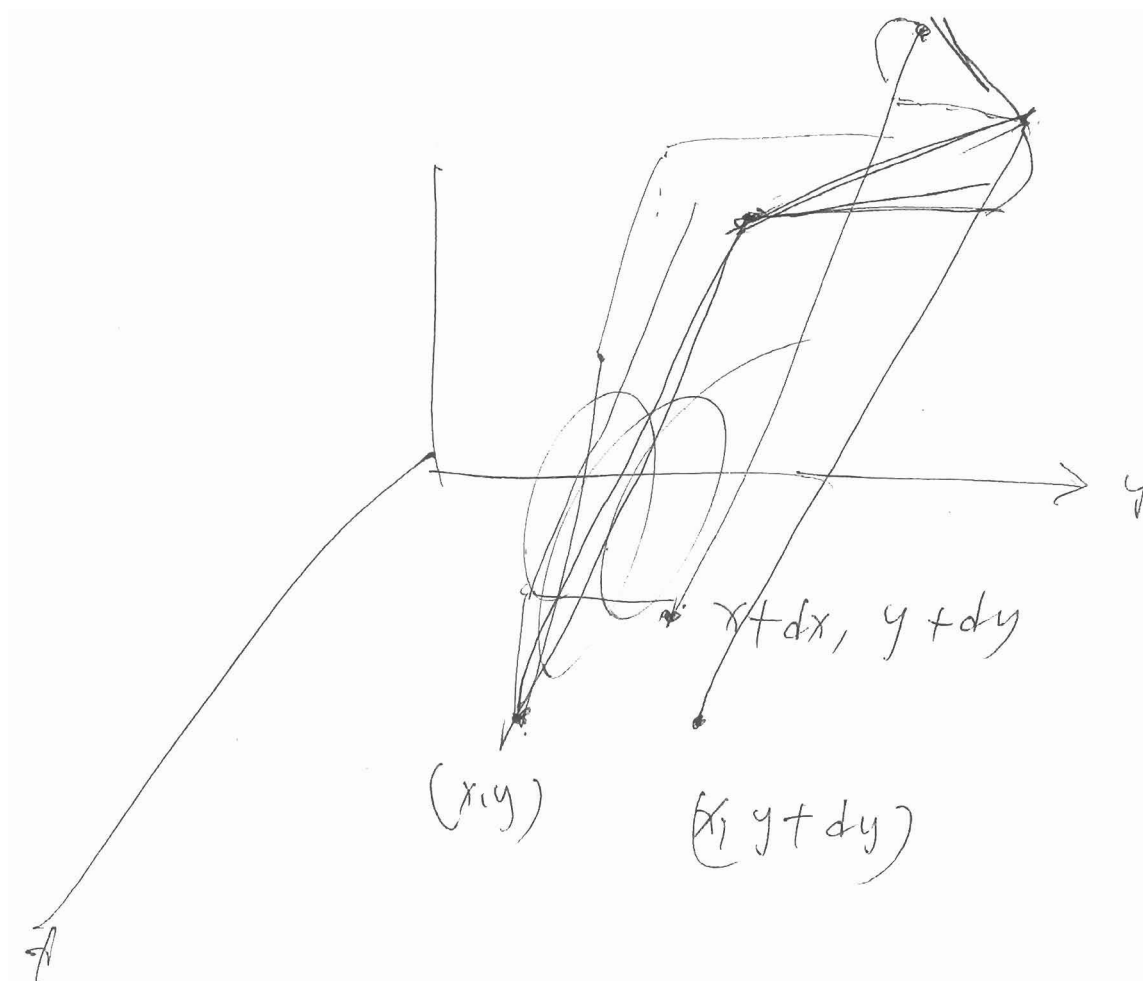
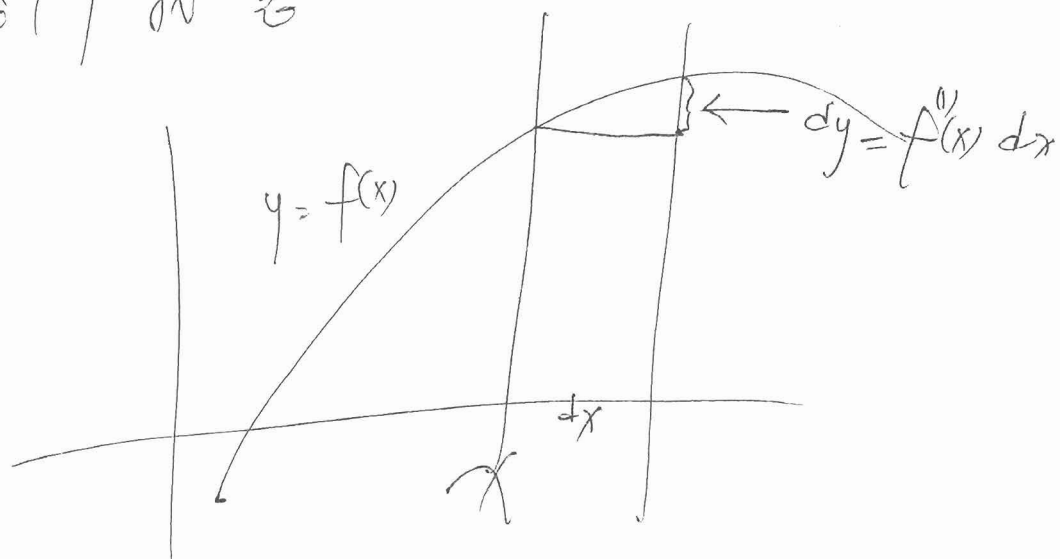
$\because f_x$ cont

$$\doteq f_{x \cancel{y}}(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

(1) 若 $z = f(x, y)$ 时, the differential of z is

$$dz = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

幾何意義



(13) 定理

$$W = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

dW = differential of W

$$= f_{x_1} dx_1 + \dots + f_{x_p} dx_p$$

(14)

$$(21) \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

問 (x, y) 點由 $(1, 1)$ 移到 $(1.01, 0.97)$ 的
函數值改變多少?

$$dx = 0.01, \quad dy = -0.03.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

$$\begin{aligned} \therefore dz &= \frac{(-x) dx + (-y) dy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \\ &= \frac{(-1)0.01 + (-1)(-0.03)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \left((x, y) = (1, 1) \right)$$

$$= \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} (0.01)$$

例, 测量某方体体积的长、宽、高, 误差
(± 0.01), 测出表面积为 50, 20, 15
同时算出体积的误差多少.

$$V = x \cdot y \cdot z$$

$$dV = k_1 dx + k_2 dy + k_3 dz$$

$$= yz \cdot dx + xz \cdot dy + xy \cdot dz$$

$$= 20 \cdot 15 \cdot (\pm 0.01) + 50 \times 15 \cdot x(\pm 0.01)$$

$$+ 50 \times 20 \cdot x(\pm 0.01)$$

$$= 2050 \cdot x(\pm 0.01)$$

$$= \pm 20.5$$

定義 (Differentiability).

令 $z = f(x, y)$, 在 (x_0, y_0) 上面若滿足

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$= f_x(x_0, y_0) \Delta x$$

$$+ f_y(x_0, y_0) \Delta y$$

$$+ \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

指误差项
 $\varepsilon_1 \Delta x$ 及 $\varepsilon_2 \Delta y$ 要
 $f_x \Delta x$ 及 $f_y \Delta y$ 要小

其中當 $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ 時
 $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ 。

則稱 f 在

(x_0, y_0) 處可微分 (differentiable)。

在 $y = f(x)$ 可微分指 f' 存在。但在二維

函數中，微分包含在各種方向上面，

不只是 f_x 及 f_y 兩個。在二維函數中，無法

寫出 $f(x, y)$ 的微分形式。光有 f_x 及 f_y

是不能保證 $f(x, y)$ 可微分。

定理: $z = f(x, y)$,

若 $f_x(x, y)$ 及 $f_y(x, y)$ 在 (x, y) 处 cont, 则

f 在 (x, y) 处为 differentiable.

~~$\therefore$ 偏微分存在且连续 $\Rightarrow$ 可微分 $\Rightarrow$ 连续~~

定理

若 f 在 (x, y) 处为 differentiable, 则

f 在 (x, y) 处 cont.

~~证明~~ 若 f 在 (x, y) 处不 cont $\Rightarrow f$ 在
 (x, y) 处不可微分.

$$\text{例: } f(x,y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

证明 f 在 $(0,0)$ 不可微分。

首先用前定理结论：
若 f 在 $(0,0)$ 不 $\text{cont} \Rightarrow$ 不可微分

$\therefore$ 证 f 在 $(0,0)$ 不 cont 。

证 f 在 $(0,0)$ 的极限值不存在 $\Rightarrow$ 不 cont

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) \quad (\text{由 } x \text{ 轴逼近})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$(\text{若由对角线 } x=y \text{ 逼近}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x^2}{2x^2} = \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{若由 } x=-y \text{ 逼近} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

$\therefore f$ 在 $(0,0)$ 的极限值不存在。

$\Rightarrow$ 不 cont

$\Rightarrow$ 不可微分

12.5. Chain Rules.

$$\text{令 } W = f(x, y). \quad \text{其中 } x = x(t), y = y(t)$$

$$\therefore W = f(x(t), y(t)) \quad \therefore dW = \text{differential} \\ = f_x dx + f_y dy$$

$$\therefore \frac{dW}{dt} = \frac{f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy}{dt}$$

$$= f_x(x, y) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \right) + f_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$(2) W = x^2 y - y^2. \quad \text{其中 } x = \sin t, y = e^t$$

$$\frac{dW}{dt} = W_x \cdot \frac{dx}{dt} + W_y \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= (2xy) \cdot \cos t + (x^2 - 2y) \cdot e^t$$

推廣到 p 維

$$W = f(x_1, \dots, x_p) \quad \text{其中 } x_j = x_j(t), j=1, \dots, p$$

$$\frac{dW}{dt} = f_{x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + f_{x_p} \frac{dx_p}{dt}$$

Chain Rule: $W = f(x, y)$ 其中 $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$

$$\therefore W = f(g(s, t), h(s, t)).$$

$$\therefore dW = f_x \cdot dx + f_y \cdot dy$$

$$\therefore \frac{dW}{ds} = f_x \cdot \frac{dx}{ds} + f_y \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{dW}{dt} = f_x \cdot \frac{dx}{dt} + f_y \cdot \frac{dy}{dt}$$

(2) 证

$$W = f(x_1, \dots, x_p), \text{ 其中 } x_j = x_j(t_1, \dots, t_g)$$

~~$$x_j = x_j(s, t)$$~~

$$dW = f_{x_1} dx_1 + \dots + f_{x_p} dx_p$$

$$\frac{dW}{dt_1} = f_{x_1} \left(\frac{dx_1}{dt_1} \right) + \dots + f_{x_p} \left(\frac{dx_p}{dt_1} \right)$$

$\vdots$

$$\frac{dW}{dt_g} = f_{x_1} \frac{dx_1}{dt_g} + \dots + f_{x_p} \frac{dx_p}{dt_g}$$

$$(12) \quad w = xy + yz + xz \quad \# \phi$$

$$x = s \cos t, \quad y = s \sin t, \quad z = t$$

$$\frac{d}{dt} \text{ at } s=1, t=2\pi \text{ 的 } \frac{dw}{ds} \text{ 及 } \frac{dw}{dt} \text{ 值}$$

$$\begin{cases} w_x = y + z \\ w_y = x + z \\ w_z = x + y \end{cases} \quad \therefore \frac{dw}{ds} = (y+z) \cdot \frac{dx}{ds} + (x+z) \frac{dy}{ds} + (x+y) \frac{dz}{ds}$$

$$\begin{cases} w_z = x + y \end{cases} \quad = (y+z) \cos t + (x+z) \sin t + 0$$

$$\begin{aligned} \text{在 } s=1, t=2\pi \text{ 时} \\ x=1, y=0, z=2\pi \end{aligned} \quad \therefore \frac{dw}{ds} \bigg|_{s=1, t=2\pi} = 2\pi \cdot 1 + (2\pi+1) \cdot 0 + 0 = 2\pi$$

$$(2) \text{ 求 } \frac{dw}{dt} = (y+z) s(1) \sin t$$

$$+ (x+z) s \cdot \cos t$$

$$+ (x+y) \cdot 1$$

$$= 2\pi \cdot 0 + (1+2\pi) \cdot 1 + (0+1) \cdot 1$$

$$= 2 + 2\pi \quad \#$$

Implicit Partial Differentiation

隱函求偏微分

~~隱函~~ 隱函數微分：指 x, y 隱性滿足 $F(x, y) = 0$ ，求 $\frac{dy}{dx}$

Chain 提供另一種替代方法求解隱函的微分

若函數 $W = F(x, y)$ ，求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{dx}{dy}$

~~隱函~~ $\therefore dW = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy$

$$\therefore \frac{dW}{dx} = F_x \cdot 1 + F_y \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

$\therefore$ 當 $W=0$ 時，亦即隱函為常態 $F(x, y) = 0$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d0}{dx} = 0 = F_x \cdot 1 + F_y \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(-1)F_x \cdot 1}{F_y} = \frac{-F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

推廣: 若 $F(x, y, z) = 0$, 其中 $z = g(x, y)$

$$\therefore F(x, y, z) = F(x, y, g(x, y)) \Rightarrow 0$$

求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{dz}{dy}$. 如前例視為以 x, y 為變數, x, y 之間無關係.

① 求 $\frac{dz}{dx}$ $\because F(x, y, g(x, y)) = 0$

對 x 微分, 產生 $\frac{dF}{dx} = 0 = F_x \cdot \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx} + F_z \cdot \frac{dz}{dx}$
 $\because x, y$ 無關 $\therefore \frac{dy}{dx} = 0$ $\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{(-1) F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$

② 求 $\frac{dz}{dy}$ $\because F(x, y, g(x, y)) = 0$

對 y 微分, 產生 $\frac{dF}{dy} = 0 = F_x \frac{dx}{dy} + F_y \frac{dy}{dy} + F_z \cdot \frac{dz}{dy}$
 $\because \frac{dx}{dy} = 0$ $\therefore \frac{dz}{dy} = \frac{-F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}$

12.6. Directional Derivatives and Gradients

在 2 维平面上面，沒有定義微分函数，因為微分
是因為方向太多了，無法寫出微分函数。

但是當我們用 西瓜刀 在 2 维平面任意方向
將此函数曲面切下，我們就可以將

函数的切口曲線做微分，且算出

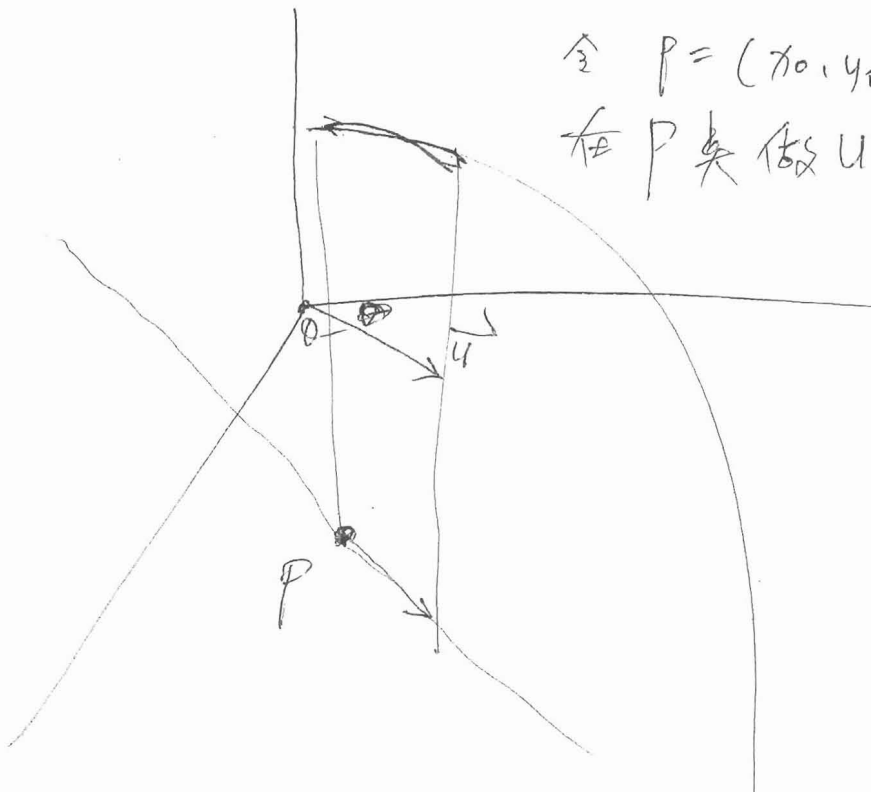
微分值為何何？此稱之為方向微分

函数 $z = f(x, y)$

令 $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ ，在 u 方向
做微分

令 $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

在 P 點做 u 方向微分



方向微分:

过点, 且方向为 u 的直线方程式为

$$L: \begin{cases} x = x_0 + t \cos \theta, \\ y = y_0 + t \sin \theta \end{cases}$$

在此 L 直线上若点向 P 点靠近
则极限值为何?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h \cos \theta, y_0 + h \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{h} = \text{在 } P \text{ 点的 } \theta \text{ 方向微分值}$$

$$= D_u f(x_0, y_0) \quad (\text{符号为})$$

$$\text{令 } g(t) = f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta)$$

$$g'(t) = f_x \cdot \cos \theta + f_y \cdot \sin \theta$$

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t} = D_u f(x_0, y_0)$$

∴ 方向係數

$$D_u f(x_0, y_0) = \cancel{f'} g''(0)$$

$$= f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta$$

$$= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot \overrightarrow{u}$$

因此 $\overrightarrow{u}$ 需為單位長



例

$$(x_0, y_0) = (1, 2), \quad \vec{u} = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\therefore D_u f(x_0, y_0) = (f_x, f_y) \cdot \vec{u}$$

$$\Rightarrow f_x = -2x, \quad f_y = -\frac{1}{2}y$$

$$\therefore D_u f(1, 2) = (-2, -1) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) f(x, y) = x^2 \sin 2y \quad \text{at } (1, \frac{\pi}{2}), \quad \vec{u} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

~~求 $D_u f(1, \frac{\pi}{2})$~~

即位置 $\vec{u}$ 为 $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$

$$f_x = 2x \sin 2y$$
$$f_y = 2x^2 \cos 2y$$

$$\therefore D_u f(1, \frac{\pi}{2}) = (f_x, f_y) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right)$$

$$= (0, -2) \cdot \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5} \right) = \frac{8}{5}$$

定义 (gradient of a function of two variables)

the gradient of $f(x, y)$, 可记为 $\nabla f(x, y)$ 或 $\text{grad } f(x, y)$, 是一个二维向量定义为 $(f_x(x, y), f_y(x, y))$

$$\therefore \nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

$$\therefore \text{方向微分 } D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Gradient 的应用. (梯 = 垂直 故在那
一个方向有最大的上升方向及最大的下降方向)

②

Theorem: ① $f(x,y)$ 可微分 (亦即 f_x, f_y 均 cont)

① If $\nabla f(x,y) = 0$, then $D_u f(x,y) = 0$ for all u .

② The direction of maximum increase of f

is given by $\nabla f(x,y)$, $\left(\because \max_u D_u f(x,y) \right)$

and the maximum value of

$D_u f(x,y)$ is $\|\nabla f(x,y)\|$

$$= \max_u \nabla f(x,y) \cdot u$$

$$\because u = \nabla f(x,y) / \|\nabla f\|.$$

③ The direction of minimum increase of f is

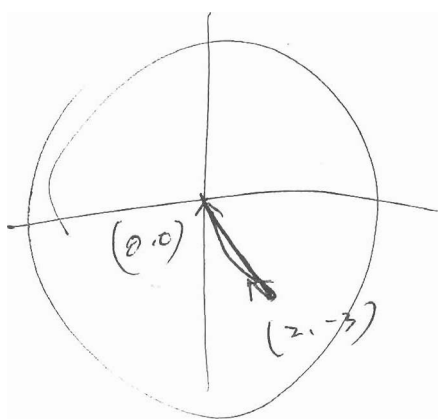
given by $-\nabla f(x,y)$ and the minimum value of

$D_u f(x,y)$ is $(-1) \|\nabla f(x,y)\|$.

例：一個鐵板^{↑ 坐標(x,y)上}的溫度為 $T(x,y) = 20 - 4x^2 - y^2$

找出由(2,-3)位置如何~~在~~熱過程中，移到(0,0)位置，~~的~~路徑為何。

令路徑方程式為 $r(t) = (x(t), y(t))$, $r(0) = (2, -3)$



$$r'(t) = (x'(t), y'(t))$$

= 瞬間移動的方向

$$\nabla T(x,y) = (-8x, -2y)$$

$$\therefore r''(t) \propto \nabla T(x,y)$$

$$\begin{cases} k \cdot x''(t) = -8x \Rightarrow k \frac{dx(t)}{dt} = -8x \\ k \cdot y''(t) = -2y \Rightarrow k \frac{dy(t)}{dt} = -2y \end{cases}$$

$$\therefore \frac{\frac{dx}{dt}}{dx} = \frac{-8x}{dx} = -\frac{8}{1} \quad \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{-8x}{-2y} = \frac{4x}{y}$$

軌跡滿足方程式 $x = \frac{2}{3} y^4$

$$\therefore c_1 + \ln x = c_2 + 4 \ln y$$

$$\therefore x = c \cdot y^4 \quad \therefore x(t) = c \cdot y(t)^4$$

Theorem: (Gradient is normal to the level curve)

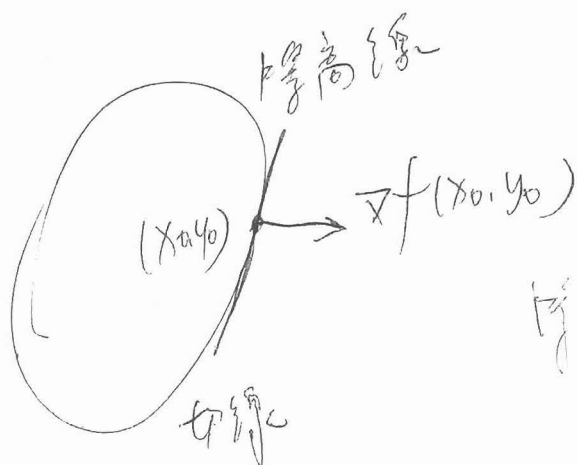
If f is differentiable at (x_0, y_0) and

$\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, then $\nabla f(x_0, y_0)$ is normal to the level curve through (x_0, y_0) .

$\therefore$ 若每點 (x, y) 在此等高線上的切線

level curve 等高線.

$\nabla f(x_0, y_0)$ 垂直於通過 (x_0, y_0) 之等高線在 (x_0, y_0) 之切線，在此等高線上面每一個點之函數值均為 $f(x_0, y_0)$



等高線即為 $f(x, y) = k$
 $\Rightarrow f(x, y(x))$ 小至 x 變而 y 隨之變
 切線斜率 $y'(x)$

1. 用隱函數微分

$$f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' = 0$$

$$\therefore y' = \frac{-f_x}{f_y}$$

$\therefore$ 切線 gradient:

切線方向為 $(1, \frac{-f_x}{f_y})$

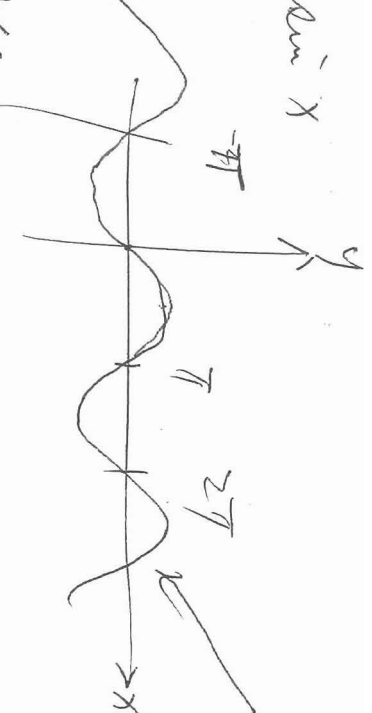
例: $f(x,y) = y - \sin x$,

① 刻出高度为 0 之 f 的等高线

② 找出此等高线上面每一点的 gradient

① $f(x,y) = 0 = y - \sin x$

$\therefore y = \sin x$



此等高线在 π 处的斜率为 $\cos x$

$\therefore$ 切线方向为 $(1, \cos x)$



验证

$\nabla f(x,y)$ where $y = \sin x$

等于 $(1, \cos x)$

$\nabla f(x,y) = (-\cos x, 1)$

$\therefore \nabla f(x, \sin x) = (-\cos x, 1) \perp (1, \cos x)$

#

Functions of three variables

$$W = f(x, y, z).$$

① $\nabla f(x, y, z) = \text{gradient of } f \text{ at } (x, y, z)$
 $= (f_x, f_y, f_z)$

② $D_u f = \nabla f \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

③ If $\nabla f(x, y, z) = 0$, then $D_u f(x, y, z) = 0$ for all u

④ The direction of max increase of f
is given by $\nabla f(x, y, z)$ with the max value of $D_u f(x, y, z) = \|\nabla f\|$.

⑤ The direction of min increase of f
is given by $-\nabla f(x, y, z)$ with the min value of $D_u f(x, y, z) = -\|\nabla f\|$.

習題 page 875, 41-44

12.7. Tangent Planes and Normal Lines

令空間中有一個曲面 S 滿足 $F(x, y, z) = 0$.

例如若方程式 $z = f(x, y)$, 則取 $F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0$.

即可。令 $P = (x_0, y_0, z_0) \in S$

如何過 P 點做出 S 的切平面？

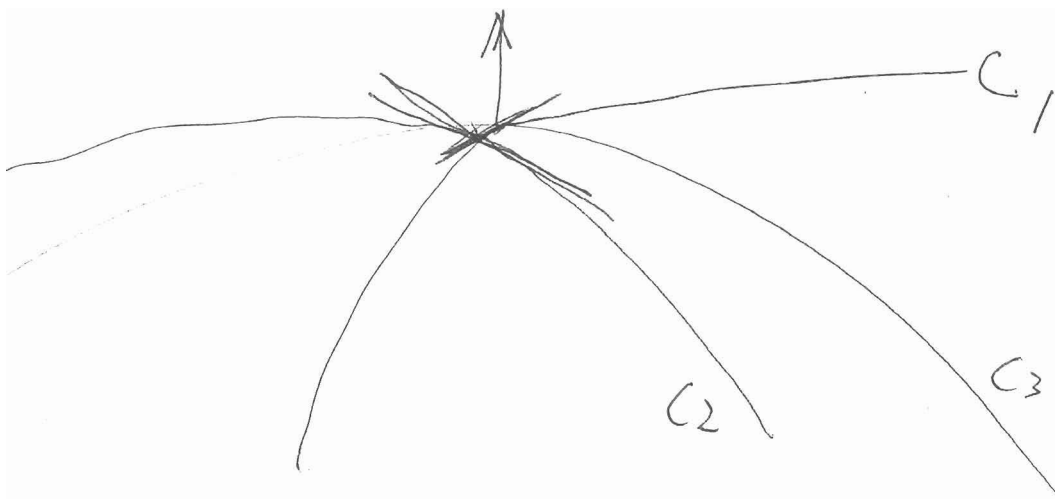
令 C 為 S 曲面上的任一曲線，此曲線 C 的參數方程式為 $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$\because C \subset S \quad \therefore$ 滿足 $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$.

令 $(x_0, y_0, z_0) = r(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

$$\begin{aligned} \therefore 0 &= \frac{dF(t)}{dt} = F_x(x, y, z) \cdot x'(t) + F_y \cdot y'(t) + F_z \cdot z'(t) \\ &= \nabla F(x, y, z) \cdot r'(t) \end{aligned}$$

$\therefore \nabla F(x, y, z)$ 與過 P 點的 S 曲面上任一曲線 C 在 P 點的切線垂直



$\therefore$ S 曲面上任一點 P 的曲線在
 P 點的切線都在同一平面上!!
 均垂直 $\nabla F(x, y, z)$) ① 過 P 點且

與 $\nabla F(x, y, z)$ 垂直的平面為 S 在 P 點
 的切平面, ② 過 P 點且具有方向 $\nabla F(x, y, z)$
 的直線稱為 S 在 P 點的 normal line

$\therefore$ tangent plane 之方程式 $F_x(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0)$
 $+ F_y(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0)$
 $+ F_z(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0$

normal line 之方程式 $(x_0, y_0, z_0) + k \cdot (F_x(x_0, y_0, z_0),$
 $F_y(x_0, y_0, z_0),$
 $F_z(x_0, y_0, z_0))$

例: 在曲面 $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ 上的点 $(1, 1, 4)$
之切平面及法线方程:

$$\therefore F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0.$$

$$\therefore F_x(x, y, z) = -4x, \quad F_y = -4y, \quad F_z = 2z.$$

$$\therefore F_x(1, -1, 4) = -4, \quad F_y(1, -1, 4) = 4, \quad F_z(1, -1, 4) = 8,$$

$$\therefore \text{切平面为 } F_x(x-1) + F_y(y+1) + F_z(z-4) = 0$$

$$\therefore -4 \cdot (x-1) + 4(y+1) + 8(z-4) = 0$$

$$\therefore (x-1) - (y+1) - 2(z-4) = 0$$

$$\therefore x - y - 2z = -6$$

$$\text{法线方程为 } (1, -1, 4) + k(-4, 4, 8)$$

$$k \in \mathbb{R}$$

例 找出 $\left\{ \begin{array}{l} S_1: x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20 \\ S_2: x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{array} \right\}$ 交線曲線

在點 $(0, 1, 3)$ 的切線方程式

~~此交線~~ C 為此交集曲線， $\therefore C \subset$ 這兩個曲面

$\therefore C$ 在 $(0, 1, 3)$ 處的切線分別與這兩個曲面的 gradient 垂直。

S_1 在 $(0, 1, 3)$ 的 gradient 為

$$(F_x, F_y, F_z) = (2x, 4y, 4z) = (0, 4, 12)$$

S_2 在 $(0, 1, 3)$ 的 gradient 為

$$(F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 1) = (0, 2, 1)$$

$\therefore C$ 在 $(0, 1, 3)$ 處的切線垂直

$(0, 4, 12)$ 及 $(0, 2, 1)$ 兩個向量

$\therefore$ 切線方向為此二個向量的外積

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-20, 0, 0)$$

∴ C 在 $(0, 1, 3)$ 的切線方程式為

$$(0, 1, 3) + k(-20, 0, 0), \quad k \in \mathbb{R}.$$

習題 page 884. 28-30

A Comparison of the Gradients $\nabla f(x, y)$ and $\nabla F(x, y, z)$.

曲面 S 表示为 $z = f(x, y)$.

则 $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ 与 S 上高度为 $f(x_0, y_0)$ 的等高线在 (x_0, y_0) 点的切线垂直, $\nabla f(x_0, y_0)$ 为二维向量.

此结果可推广到三维,

$W = F(x, y, z)$.

则 $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$

与 F 上具有高度 $F(x_0, y_0, z_0)$ 的等高线在 (x_0, y_0, z_0) 点的切线垂直.

$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ 为三维向量.

12.8. Extrema of Functions of Two Variables.

在二变函数中找 绝对极大(小)值
或 相对极大(小)值

① 在单变函数中找极值方法是

先找 critical points (即 $f'(x)=0$, 及不可微分点, 端点), 再计算每一个 critical point 的

函数值, 及画出图形。

极值只发生在 critical point 上面。

② 二变函数的 critical points 定义为

① $f_x(x,y)=0$ 及 $f_y(x,y)=0$,

② $f_x(x,y)$ 或 $f_y(x,y)$ 不存在。

Theorem: If f has a relative extremum at (x_0, y_0) on an open region, then (x_0, y_0) is a critical point of f

∴ 极值只发生在 critical point 上面。

Theorem (Second Partial Test)

令 $z = f(x, y)$,

f 有 2 阶偏导数 且 $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$
连续的

$$\Delta d = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2.$$

① 若 $d > 0$ 且 $f_{xx}(a, b) > 0$, 则 f 在 (a, b) 为
相对极小值,

② 若 $d > 0$ 且 $f_{xx}(a, b) < 0$, 则 f 在 (a, b) 为
相对极大值,

③ 若 $d < 0$, 在 f 在 (a, b) 为鞍点. 指 $(a, b, f(a, b))$
为马鞍点

④ 若 $d = 0$, 无结论.

例: $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

求 f 的相对极值.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -3x^2 + 4y = 0 \\ f_y(x,y) = 4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \therefore \text{驻点 } (0,0), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$f_{xx} = -6x, \quad f_{yy} = -4, \quad f_{xy} = 4.$$

验证 $(0,0)$

$$\Delta = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}(0,0)^2 = -16 < 0.$$

$\therefore (0,0, f(0,0) \equiv 1)$ 为极大值.

验证 $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

$$\Delta = f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)f_{yy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) - f_{xy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)^2 = 16$$

$$f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$$

$\therefore \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 为相对极大值位置.

绝对极大值位置.

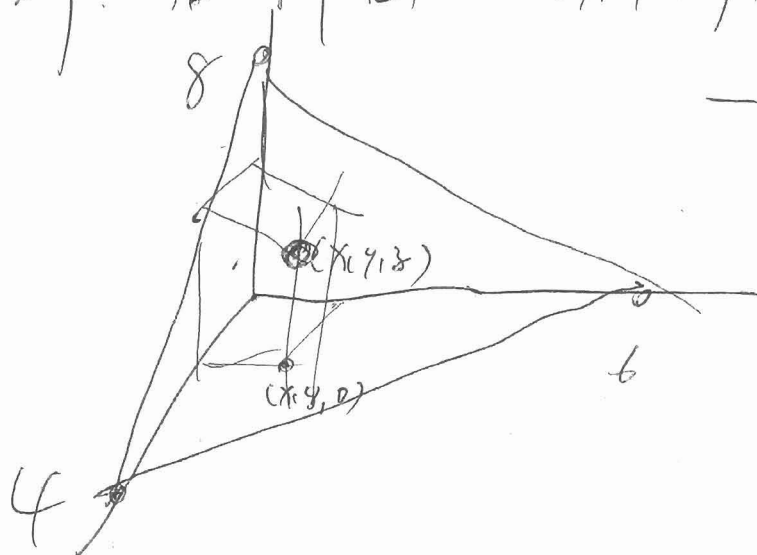
~~在~~ 在所有的 critical point 中具有
最大(或)最小值者即是绝对极值
位置.

习题: 7, 8, 35

12.9. Applications

例. 在斜面上 $6x + 4y + 3z = 24$. 求最大
一個長方體. 問此

長方體最大體積
為何.



$$V = x \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot \left(\frac{24 - 6x - 4y}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} \right) (24xy - 6x^2y - 4xy^2)$$

max x, y

$$\begin{cases} V_x = \frac{y}{3} (24 - 12x - 4y) = 0 \\ V_y = \frac{x}{3} (24 - 6x - 8y) = 0 \end{cases} \quad \text{根為 } (0,0) \quad \left(\frac{4}{3}, 2 \right)$$

$$V_{xx} = -4y, \quad V_{yy} = -\frac{8}{3}x, \quad V_{xy} = \frac{1}{3}(24 - 12x - 8y)$$

在 $(\frac{4}{3}, 2)$ 的 d 值為 $\frac{64}{3} > 0$

V_{xx} 值 $= -8 < 0$

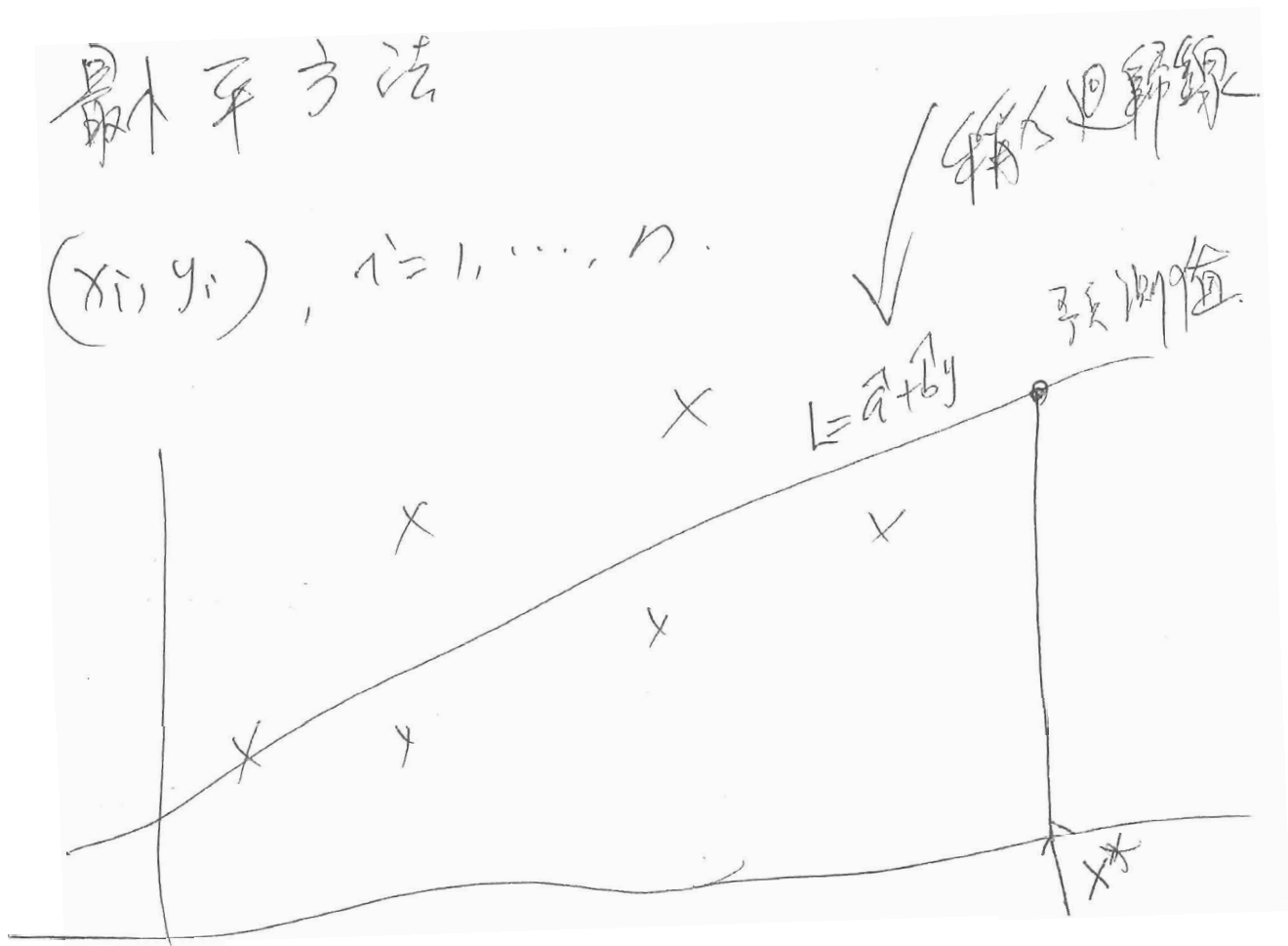
$\therefore (\frac{4}{3}, 2)$ 為極大位置 $\therefore$ 最大體積

且此為絕對極大

$$V = \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{24 - 6 \cdot \frac{4}{3} - 4 \cdot 2}{3} = \frac{64}{9}$$

最小二乘法

$(x_i, y_i), i=1, \dots, n$



填入一回归线 $L = a + bx$ 满足

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \text{ 最小.}$$

解出 a, b .

$$\begin{cases} S_a = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - b x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_b = \sum_{i=1}^n 2(y_i - a - b x_i)(-x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \text{根}(a, b) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right)$$

~~解得~~ a, b 根

$$S_{aa} = \sum_{i=1}^n 2 \Rightarrow 2n > 0$$

$$S_{bb} = \sum_{i=1}^n 2 x_i^2 = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

$$S_{ab} = \sum_{i=1}^n 2 x_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\therefore d = 2n \cdot 2 \sum x_i^2 - (2 \sum x_i)^2$$

$$= 4n \sum x_i^2 - 4(\sum x_i)^2$$

$$= 4 \left[\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right] \geq 0$$

$$\because x_i \text{ 不全相等} \therefore d > 0$$

$$\therefore S_{\text{总}}(a, b) = \left(\frac{\sum y_i}{n}, \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \right) \text{ 为相对极小}$$

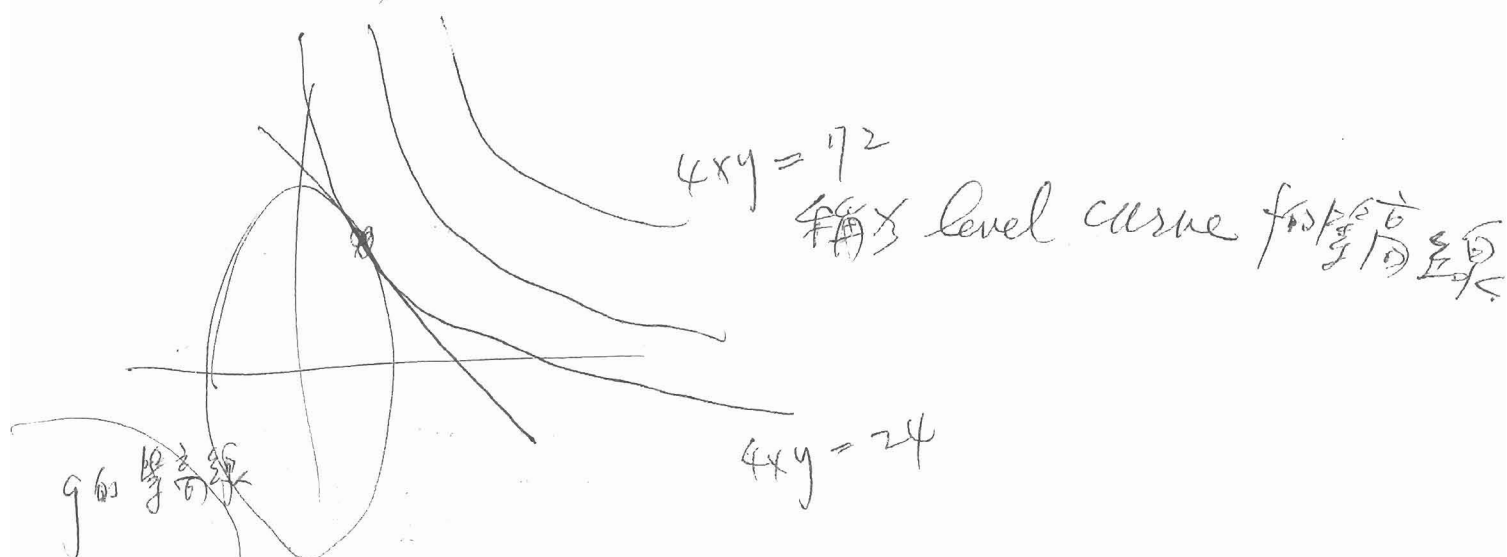
\$\therefore b=1, 1\$ 为相对极小

12.10 Lagrange Multiplier

在限制式中找目標函數的極值
及極值產生位置

例 $\max: f(x, y) = 4xy$

subject to $g(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$



如何找到交點坐標？

利用交點處兩條曲線有共同的切線。此切線與兩條等高線的 gradient 相垂直。∴ 兩條等高線的 gradient 成比例。

令交点坐标为 (x, y)

$$\begin{aligned}\therefore \nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ &\equiv \left(\frac{2}{9}x, \frac{2}{16}y \right) \\ &\equiv (4y, 4x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{解方程式} \quad &\left\{ \begin{aligned} 4y &= \lambda \frac{2}{9}x \Rightarrow \lambda = 4y \cdot \frac{9}{2x} = \frac{y \cdot 18}{x} \\ 4x &= \lambda \frac{2}{16}y \Rightarrow 4x = \frac{18y}{x} \cdot \frac{2y}{16} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} &= 1 \quad \therefore x^2 = \frac{9}{16}y^2 \\ \Rightarrow \frac{\frac{9}{16}y^2}{9} + \frac{y^2}{16} &= \frac{y^2}{8} = 1 \\ \therefore y^2 &= 8 \quad \therefore y = \pm\sqrt{8} \\ \text{又 } x &\neq 0, y > 0 \end{aligned} \right. \\ &\text{取 } y = \sqrt{8} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \\ &\text{取 } y = -\sqrt{8} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\therefore \max f = f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \sqrt{8}\right) = 24$$

$$f\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, \sqrt{8}\right) = -24$$

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{8}\right) = -24$$

$$f\left(\frac{-3}{\sqrt{2}}, -\sqrt{8}\right) = 24$$

Method of Lagrange Multipliers

解 $\max f(x, y)$ 或 $\min f(x, y)$
subject $g(x, y) = C$

全極值必發生在 (x, y) 處
解 $\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = C \end{cases}$

即 $\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = C \end{cases}$
①

② 將全部得到的根代入目標函數中，
產生最大 f 值者為 f 的極大值，
產生最小 f 值者為 f 的極小值，
及發生位置。

例 生產函數 $f(x, y) = 100 x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}}$

其中 x 代表人工, 成本每單位 150 元,

y 代表資本, 成本每單位 250 元.

令 人工及資本的成本限制在 50000 元中,
求最大的產量.

$$\therefore \max f(x, y) = 100 x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}},$$

$$\text{s.t. } 150x + 250y \leq 50,000 \quad (\text{原 } 150x + 250y = 50,000)$$

$$df = \left(75 x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} \quad 25 x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{-3}{4}} \right)$$

$$\nabla f = (150, 250)$$

$$\therefore \text{解} \begin{cases} 75 x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} = 150 \lambda & \Rightarrow \lambda = \frac{75 x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}}}{150} \\ 25 x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{-3}{4}} = 250 \lambda & \Rightarrow 25x = 125y \\ 150x + 250y = 50,000 & \Rightarrow x = 250, y = 50 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \text{1. max } f(x, y, z) \\ & \text{subject to } g(x, y, z) = C_1 \\ & \quad h(x, y, z) = C_2 \end{aligned}$$

$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g + \mu \vec{\nabla} h$
 $\begin{cases} g(x, y, z) = C_1 \\ h(x, y, z) = C_2 \end{cases}$

$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g + \mu \vec{\nabla} h$
 $\begin{pmatrix} f_x, f_y, f_z \\ = \lambda (g_x, g_y, g_z) + \mu (h_x, h_y, h_z) \end{pmatrix}$
 $\therefore \begin{cases} f_x = \lambda g_x + \mu h_x \\ f_y = \lambda g_y + \mu h_y \\ f_z = \lambda g_z + \mu h_z \end{cases}$